



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# Wytrzymałość Materiałów

## Rozciąganie/ ściskanie prętów prostych

Naprężenia i odkształcenia, statyczna próba rozciągania i ściskania, właściwości mechaniczne, projektowanie elementów obciążonych osiowo.

**Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki**

**Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji**

**Dr hab. inż. Kinga Nalepka**

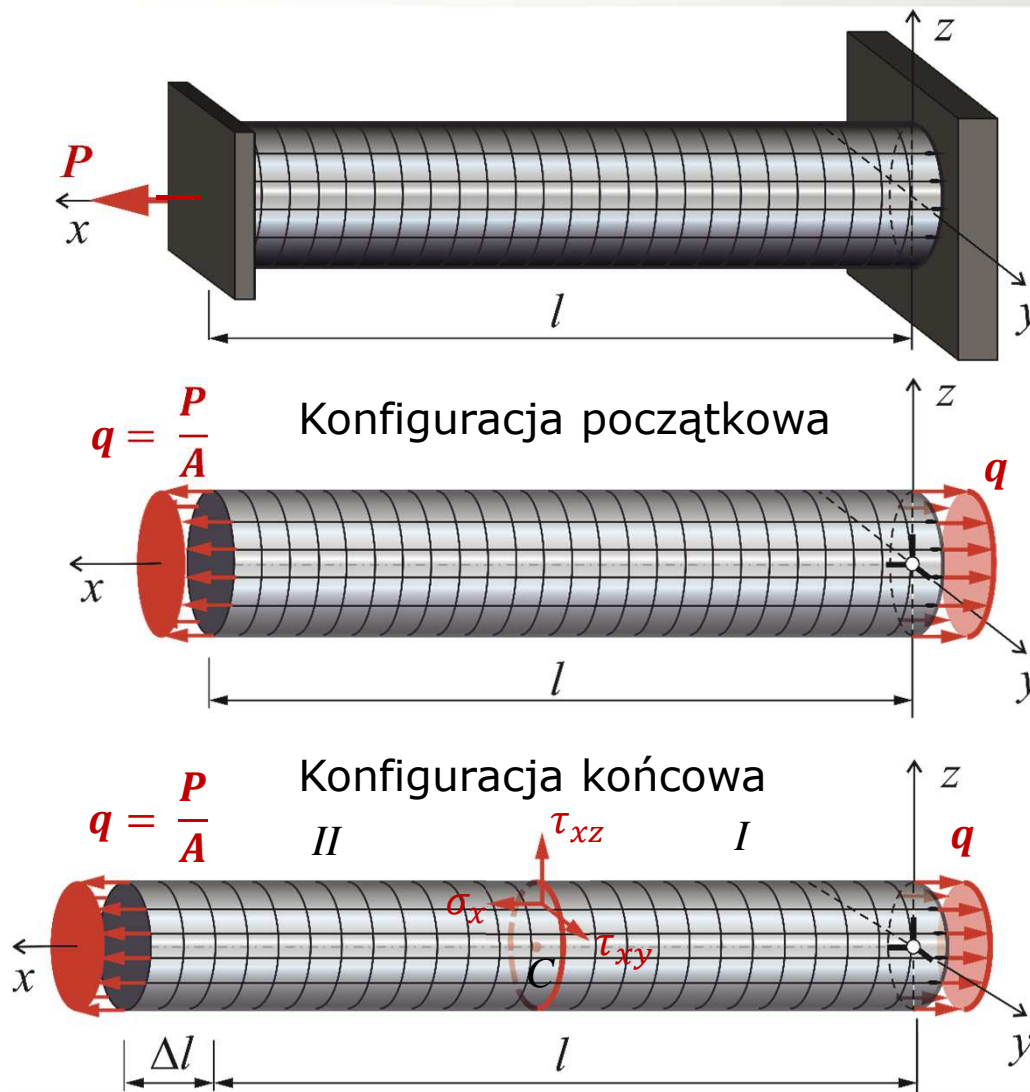
**B2, III p., pok. 312**

**e-mail: [knalepka@agh.edu.pl](mailto:knalepka@agh.edu.pl)**

**tel. 12 617 30 98**

[http://zwmik.imir.agh.edu.pl/dydaktyka/dla\\_studentow/imir/imir.html](http://zwmik.imir.agh.edu.pl/dydaktyka/dla_studentow/imir/imir.html)

# Naprężenia



Prosty pręt pryzmatyczny o dowolnym, litym przekroju poprzecznym utwierdzony na jednym końcu (w środku ciężkości) obciążono na ściankach poprzecznych siłami o równomiernie rozłożonej gęstości skierowanymi zgodnie z normalną zewnętrzną.

- Pomijamy siły masowe.
- Oś x wzdłuż osi pręta, a y i z stanowią osie główne centralne przekroju poprzecznego .

Warunki równowagi:

$$\bar{S}(W_I) = \bar{S}(Z_{II}), \bar{M}_C(W_I) = \bar{M}_C(Z_{II})$$

$$S_x(W_I) = \int_A \sigma_x dA = \int_A q dA \Rightarrow \sigma_x = \frac{P}{A} \quad (2.1)$$

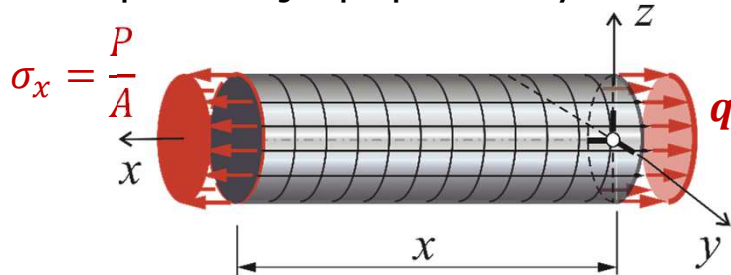
$$S_y(W_I) = \int_A \tau_{xy} dA = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = 0 \quad (2.2)$$

$$S_z(W_I) = \int_A \tau_{xz} dA = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = 0 \quad (2.3)$$

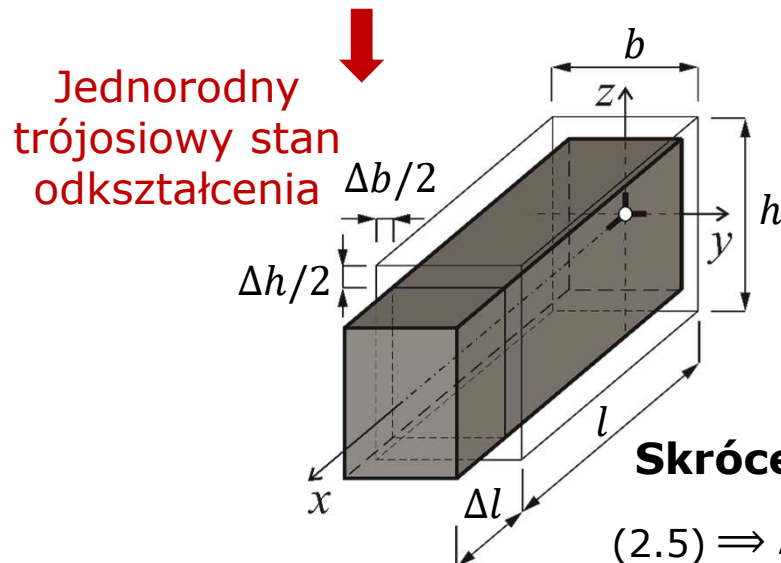
**Warunek momentów spełniony**

# Naprężenia i odkształcenia

Rozkład naprężeń w dowolnym przekroju poprzecznym



Jednorodny jednoosiowy stan naprężeń



Jednorodny trójosiowy stan odkształcenia

## Odkształcenie liniowe: względna zmiana długości włókna materialnego.

W zależności od kierunku otrzymujemy:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.4), \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b} \quad (2.5), \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h} \quad (2.6)$$

Z prawa Hooke'a:  $\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x \stackrel{(2.1)}{\Rightarrow} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \frac{P}{A} \quad (2.7)$

**Wydlużenie pręta:**  $(2.4) \Rightarrow \Delta l = \frac{Pl}{EA} \quad (2.8)$

## Współczynnik Poissona

$$\nu = - \frac{\text{odkształcenie poprzeczne}}{\text{odkształcenie osiowe}}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$$

$$(2.7) \Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu P}{EA}$$

## Skrócenie boków przekroju:

$$(2.5) \Rightarrow \Delta b = -\frac{\nu P b}{EA}, \quad (2.6) \Rightarrow \Delta h = -\frac{\nu P h}{EA}$$

materiał	$\nu$
diament	0,07
Stal konstrukcyjna	0,3
Stopy aluminium	0,33
Kauczuk	0,47

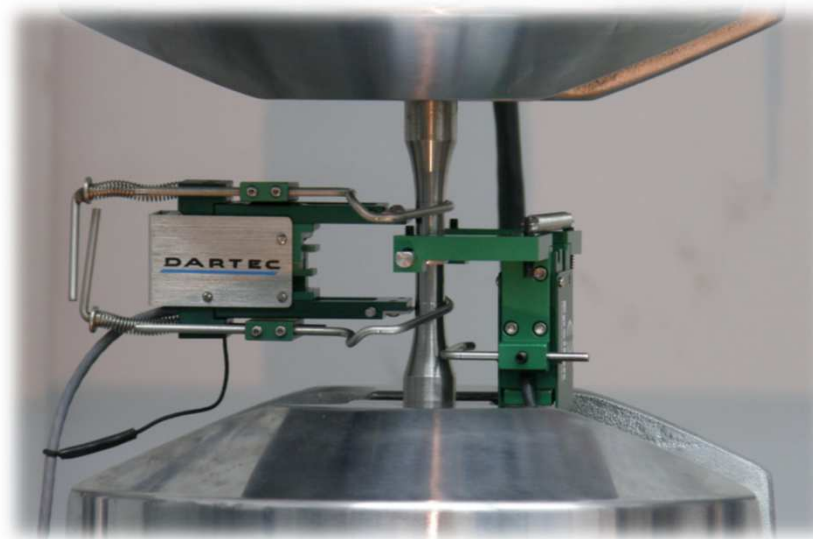
$$0 \leq \nu \leq 0.5$$

# Statyczna próba rozciągania

Maszyna wytrzymałościowa

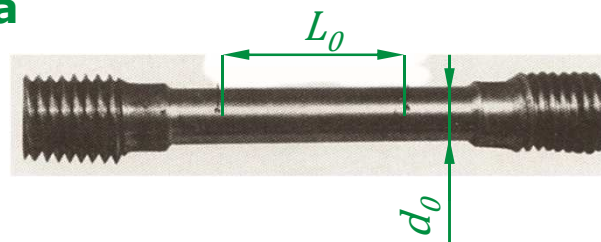


Ekstensometr liniowy i średnicowy



**Metoda badania wytrzymałości na rozciąganie metali w temperaturze pokojowej: PN-EN ISO 6892-1:2016-09**

próbka



$L_0$  - długość pomiarowa (początkowa)  
 $d_0$  - średnica początkowa

# Wykres rozciągania

## Naprężenie inżynierskie (nominalne)

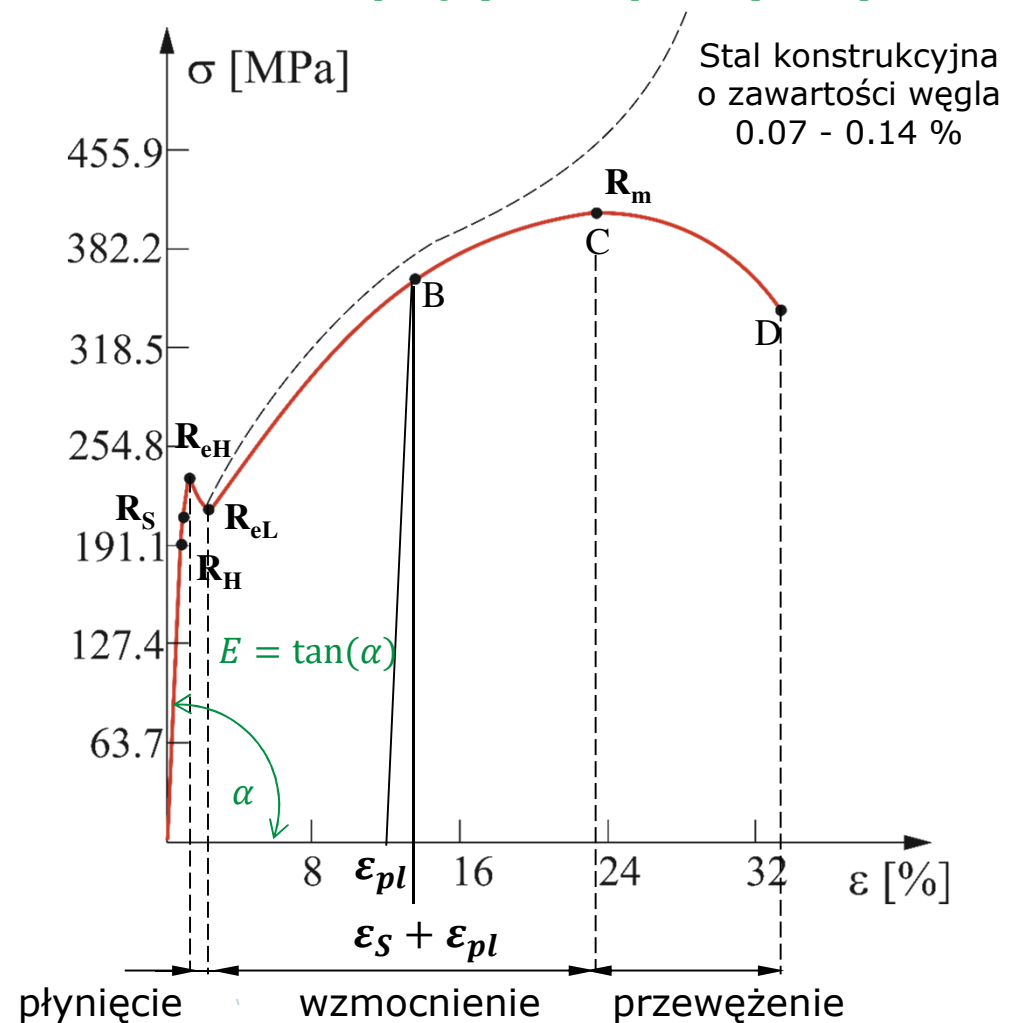
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{\text{siła}}{\text{pole pierwotnego przekroju}}$$

## Odształcenie inżynierskie

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\text{wydłużenie}}{\text{początkowa długość}}$$



## Materiał sprężysto - plastyczny





## Właściwości mechaniczne otrzymane z próby statycznego rozciągania

- $R_H$**  – granica proporcjonalności. Największa wartość naprężenia inżynierskiego, przy której zachowana jest liniowa zależność pomiędzy siłą, a wydłużeniem (prawo Hooke'a).
- $R_s$**  – granica sprężystości. Największa wartość naprężenia inżynierskiego, przy której nie wystąpią jeszcze odkształcenia trwałe. Przyjęto umowną granicę sprężystości, odpowiada ona naprężeniom wywołującym pomijalne odkształcenia trwałe  $\varepsilon_{trw} = 0.05 \%$ .
- $R_e$**  – granica plastyczności. Wartość naprężenia inżynierskiego powyżej której następuje wyraźny przyrost wydłużenia bez przyrostu siły lub nawet przy jej chwilowym spadku. Wiele materiałów wykazuje górną ( $R_{eH}$ ) i dolną ( $R_{eL} = R_e$ ) granicę plastyczności. Ograniczają one przedział wartości naprężeń, przy których następuje proces płynięcia. Niektóre materiały nie wykazują wyraźnej granicy plastyczności. Wówczas definiuje się ją w sposób umowny jako wartość naprężenia, przy której odkształcenia trwałe wynoszą 0.2 %.

**W obliczeniach inżynierskich Granica plastyczności zastępuje granicę proporcjonalności i sprężystości.**

- $R_m$**  – wytrzymałość na rozciąganie. Naprężenie inżynierskie odpowiadające maksymalnej sile rozciągającej  $F_m$ .
- $R_u$**  – naprężenie zrywające. Wartość rzeczywistych naprężeń w chwili rozerwania próbki. Stosunek siły zrywającej do pola przekroju w miejscu złomu.  $R_u = F_u / A_u$

# Właściwości mechaniczne otrzymane z próby statycznego rozciągania

- E** – moduł Younga (sprężystości podłużnej)
- charakteryzuje opór jaki materiał stawia wydłużeniom wywołanym rozciąganiem.
  - Stanowi współczynnik proporcjonalności w liniowej zależności między naprężeniem i odkształceniem, zgodnie z prawem Hooke'a  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ .
  - Stanowi tangens kąta odchylenia od osi argumentów prostej otrzymanej w próbie statycznego rozciągania poniżej granicy proporcjonalności.

**A** –Względne wydłużenie po rozerwaniu:  $A = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100\%$

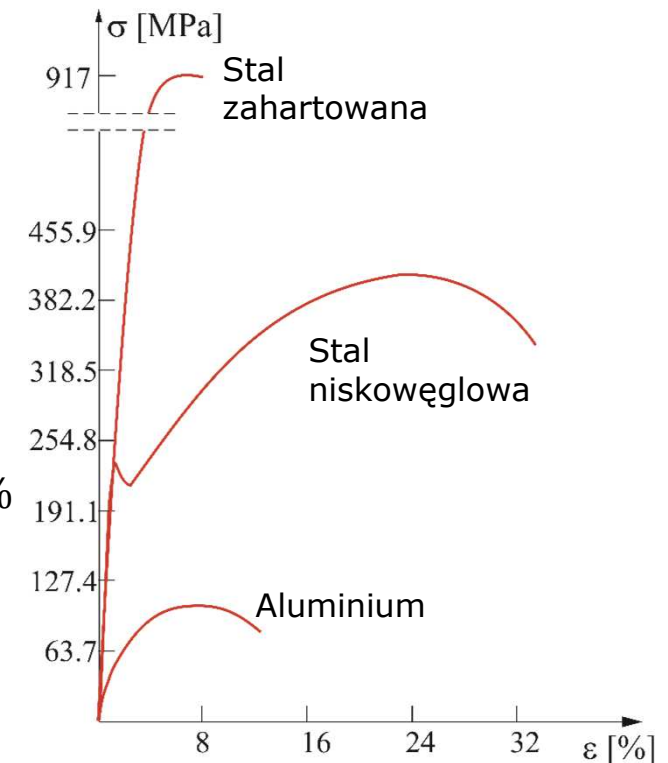
$L_0$  - początkowa długość pomiarowa (baza)

$L_u$  - łączna długość bazy po rozerwaniu

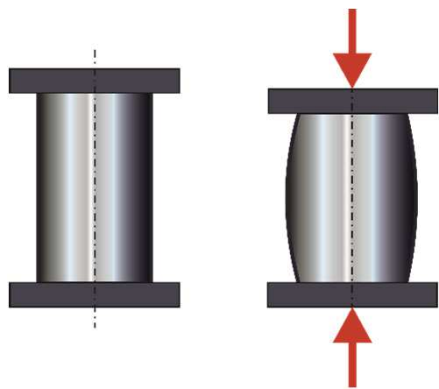
**Z** – trwałe przewężenie względne:  $Z = \frac{A_0 - A_u}{A_0} \cdot 100\%$

$A_0$  - początkowe pole przekroju

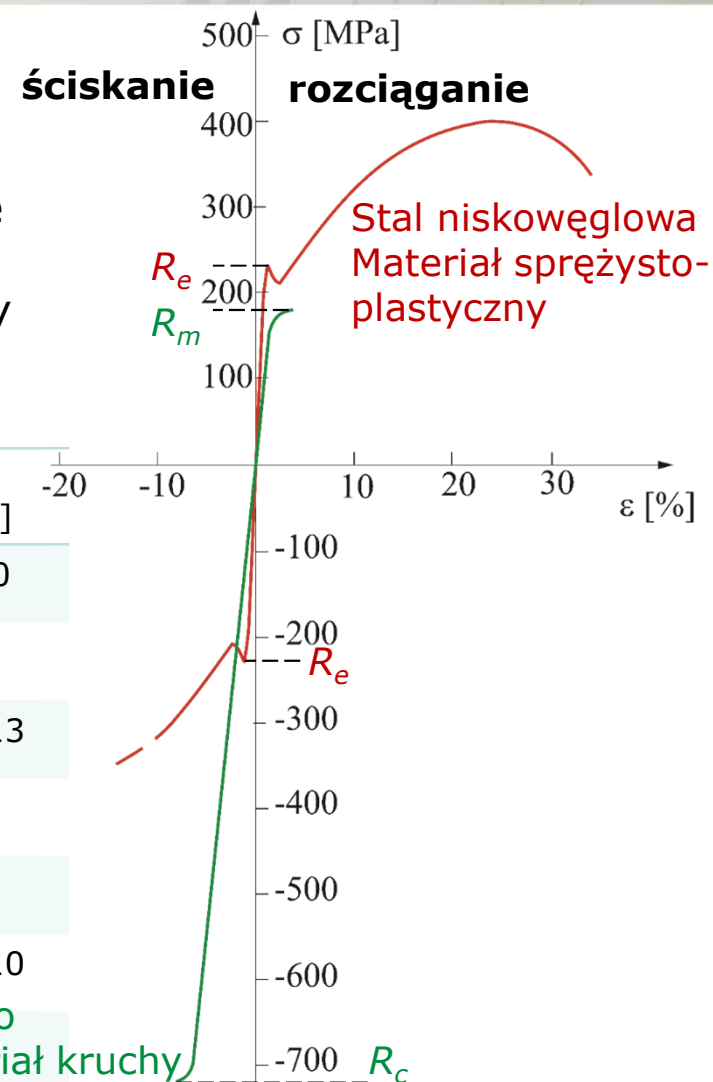
$A_u$  - pole przekroju w miejscu złomu



# Statyczna próba ściskania



$R_c$  – wytrzymałość na ściskanie. Naprężenie inżynierskie odpowiadające największej sile ściskającej  $F_c$  uzyskanej podczas próby statycznego ściskania.

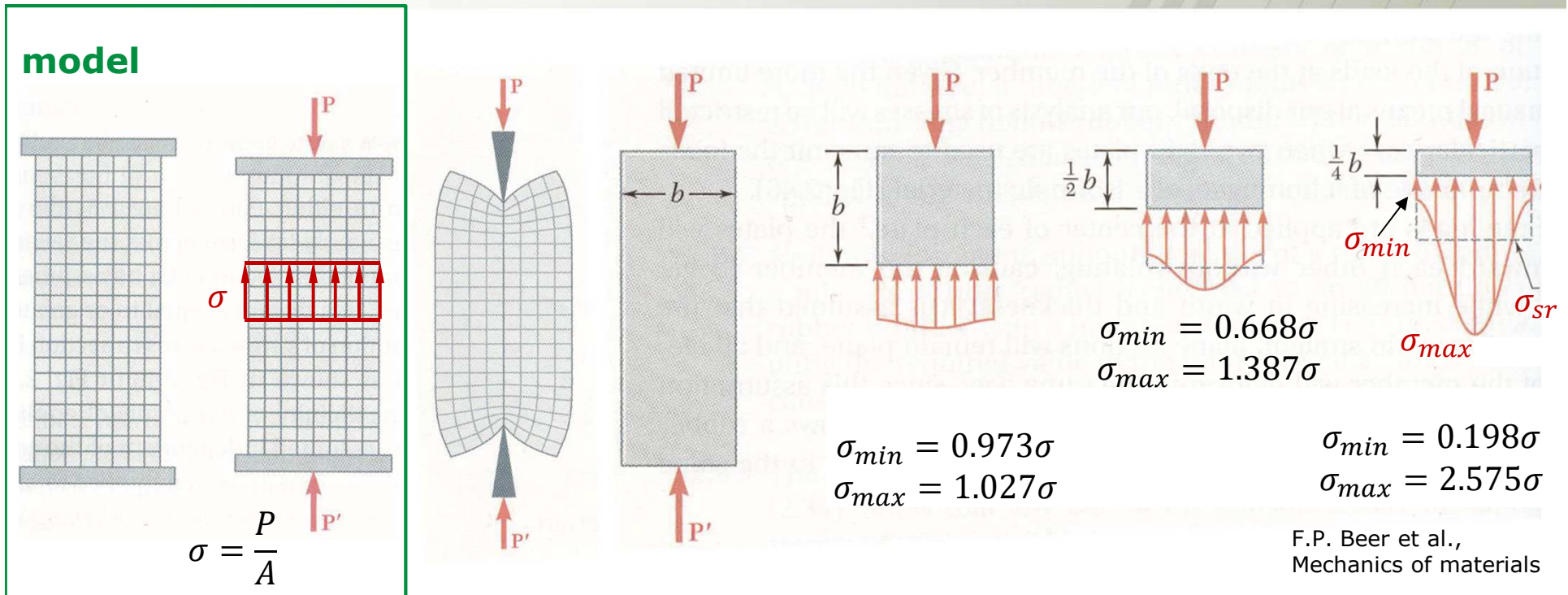


materiał	E [GPa]	$\nu$ [-]	$R_e$ [MPa]	$R_m$ [MPa]	$R_c$ [MPa]	A [%]
Kauczuk naturalny	0,002	0,49		22		600
Beton (C60/75)	39	0.2		4,4	68	
aluminium	73	0,34	50	91-101		8-13
Żeliwo zwykłe	120	0,23		122-203	713-866	
Stal (0,07 – 0.14 C)	209	0,3	214	346-458		31
Stal zahartowana	219	0,3	713	917		8-10
Diament	1200	0,07				

Żeliwo  
Materiał kruchy



# Zasada de Saint Venanta



**Jeżeli do bryły na małej powierzchni w porównaniu z całkowitą powierzchnią przyłożymy obciążenie to w dostatecznie dalekiej odległości powstające naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia będą się różnić mało od tych, które wywołałoby obciążenie statycznie równoważne pierwotnemu**

**Adhémar de Saint-Venant (1797 - 1886)**

## Warunek bezpieczeństwa

### Materiały kruche

#### Rozciąganie

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq k_r, \quad k_r = \frac{R_m}{n_m}$$

$N$  - Siła podłużna w przekroju o największym naprężeniu  
 $A$  - Pole tego przekroju  
 $k_r$  - Naprężenie dopuszczalne przy rozciąganiu

#### Ściskanie

$$|\sigma_{min}| = \frac{|N|}{A} \leq k_c, \quad k_c = \frac{R_c}{n_c}$$

$N$  - Siła podłużna w przekroju o najmniejszym (ujemnym) naprężeniu  
 $A$  - Pole tego przekroju  
 $k_c$  - Naprężenie dopuszczalne przy ściskaniu

### Materiały sprężysto-plastyczne

$$\max|\sigma| = \frac{|N|}{A} \leq k_r, \quad k_r = k_c = \frac{R_e}{n_e}$$

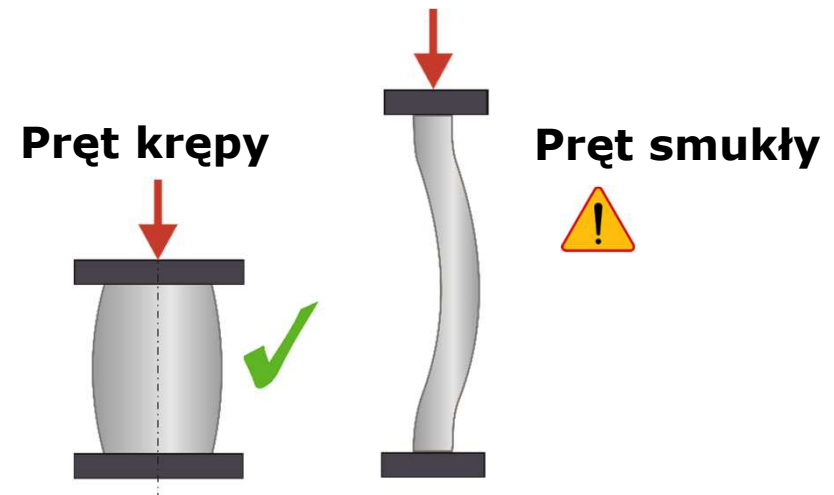
$N$  - Siła podłużna w przekroju o największej bezwzględnej wartości naprężeń  
 $A$  - Pole tego przekroju

$n_e, n_m, n_c$  : współczynniki bezpieczeństwa

# Projektowanie elementów obciążonych osiowo

## Warunek wyboczenia

W przypadku prętów smukłych, o małych wymiarach przekroju poprzecznego w porównaniu z długością, należy projektować spełniając warunek wyboczenia

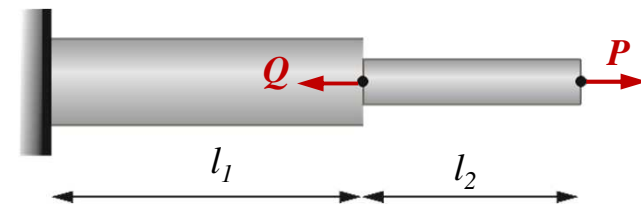


## Warunek sztywności

Całkowita zmiana długości pręta nie przekracza wartości dopuszczalnej:  $|\Delta l_c| \leq \Delta l_{dop}$

$$\Delta l_c = \sum_i \Delta l_i, \quad \text{gdzie} \quad \Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}$$

$i$  – ty segment pręta charakteryzują: długość ( $l_i$ ), pole przekroju ( $A_i$ ), moduł Younga ( $E_i$ ) oraz występująca w nim siła podłużna ( $N_i$ )



# Przykłady obliczeń inżynierskich

## Zadanie 1

Pręt aluminiowy ( $E = 70 \text{ GPa}$ ) złożony z dwóch części obciążono jak na rysunku. Wiedząc że siła  $P$  jest równa  $4 \text{ kN}$  określ wartość siły  $Q$  tak aby przemieszczenie swobodnego końca wynosiło zero, następnie wyznacz przemieszczenie punktu  $B$  oraz naprężenia w poszczególnych częściach.

## Zadanie 2

Sztywny słup  $AB$  zamocowano za pomocą stalowej liny ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) o średnicy  $4 \text{ mm}$  do podłoża. Wyznacz maksymalne obciążenie  $P$ , jeżeli naprężenie dopuszczalne dla stali wynosi  $190 \text{ MPa}$ , a dopuszczalne przemieszczenie końca belki  $B$  wynosi  $5 \text{ mm}$ .

